生物統計學講義

第　三　回

704621-3

社團法人 考友社 出版發行

704621-3

生物統計學講義　第三回

目錄

第四講　次數分析

命題大綱

一、適合度檢定
　㈠定義
　㈡理論基礎
　㈢範例
二、獨立性檢定
　㈠定義
　㈡理論基礎
　㈢範例
三、齊一性檢定
　㈠定義
　㈡公式
　㈢推廣
　㈣範例
四、McNemar 檢定
　㈠ 2×2 聯立表
　㈡理論基礎
　㈢比較
　㈣範例

重點整理

次數分析是屬於「類別變數」的假設檢定，是用來檢定所觀測的次數分配是否與假設的期望次數分配相符合，它是用來比較不同類別之間的次數結果是否有顯著性的差異存在。若是依據單一準則來分類的檢定，稱爲「適合度檢定」。若是依據雙向準則來分類的檢定，稱爲「獨立性檢定」。
無論是適合度檢定或獨立性檢定，在統計上都以卡方檢定法（Chi-Square Test）來處理。一般將卡方檢定視爲單尾的檢定，因爲此種檢定是用來檢定所觀測的次數分配是否與假設的期望次數分配相符合，結果只有兩種：「是」與「否」，而在否的情況下，並不需要討論大於或小於，因此將之視爲單尾的檢定。

一、適合度檢定

㈠定義：

1. 統計分析上，對於實際次數分配與理論分配是否配合適當，或樣本所來自之母體爲何種型態，皆可進行適合度檢定（Goodness-of-fit Test）。卡方檢定可用以探討所宣稱之機率分配是否爲眞，稱爲適合度檢定。
2. 不論是用實驗處理或用類別作爲自變數，在觀察或實驗時，任何一個自變數便稱爲一個因子（factor）。一個因子（亦即一個自變數），可以包括幾個不同程度或不同性質的值或類別，就叫做「水準」（level）。例如，把「性別」這一因數分爲男和女兩個類別，「年級」這一因數，分爲高、中、低三個類別，均屬之。此種依據單一因子來分類，將受試者分爲 k 組，由公式計算出的統計量，便是一自由度爲 k－1 的 χ^2 分配。其檢定統計量爲：

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

其中 f_o 表觀察次數
　　f_e 表期望次數

㈡理論基礎：

1. 適合度檢定的理論基礎是虛無假設 H_0 爲「此實際次數分配來自或適合某理論分配」，當實際分配不是來自或不適合某理論分配時，各組觀察次數與期望次數必相去甚遠。f_o 與 f_e 相差越大，統計量 χ^2 值越

大，應拒絕 H_0，認為實際分配與理論分配的配合不適當，故此檢定應為右尾檢定。

2.此檢定不需使用列聯表，只要直接比較臨界值與樣本計算之 χ^2 統計量大小，即可判定檢定之結果，是否拒絕虛無假設。其檢定方式主要在於比較觀察次數與期望次數之差異；若差異夠大，則表示樣本資料顯示的結果足以推翻理論之機率分配為真之虛無假設。而宣稱母體遵循特定之機率分配時，則必須先求出在此機率分配下的期望次數，再比較觀察次數與期望次數之差距，以探討母體是否遵循特定之機率分配。

3.在進行卡方檢定時，須注意以下各點：

⑴因受總次數之和相等的限制，自由度喪失 1 度外；如須用樣本統計量估計母數後，才能求算理論機率，則每估計一個，自由度喪失 1 度。如要估計 m 個母數，才可得到理論機率，則自由度 $v=k-m-1$。茲將常檢定之分配與自由度喪失情形，表列如表㈠。

表㈠　適合度檢定之母數、估計量及有關之自由度

分配模型	母數	統計量	母數已知之自由度	母數未知之自由度
分立均等分配	N	－	k－1	－
二項分配	n,p	$\hat{p}$	k－1	k－2
Poisson 分配	μ	$\overline{X}$	k－1	k－2
指數分配	λ	$1/\overline{X}$	k－1	k－2
常態分配	μ,σ^2	$\overline{X},\hat{S}^2$	k－1	k－3

⑵因統計量為不連續量數，故當自由度 $v=1$ 時，要考慮連續校正數 1/2。

⑶為提高檢定效率，要求各組之期望次數 $f_e \geq 5$，如有一組或多組的 f_e 小於 5，則須進行合併至大於或等於 5。

⑷ f_o 與 f_e 必為絕對次數，不能採用相對次數或理論機率。

⑸樣本大小 n 太小，不能使期望次數 f_e 符合要求，則不能用卡方檢定法作適合度檢定。

⑹當樣本大小 n 大時，有時會使檢定失效，而使檢定的結論永遠為拒絕 H_0，即拒絕「實際次數分配與理論分配配合適當」的假設。

㈢範例：

1.假設有一遺傳學家進行兩個 F1 雜交後代的雜交，而得到 90 個 F2 的雜交後代，其中 80 個屬於野生型，10 個屬於突變型，而此遺傳學家根據顯隱性的假設，期望其表現型態成 3：1 的比例，試問此實驗結

果是否與期望假設相符合？（$\alpha=0.05$）

⑴虛無假設 H_0：實驗結果與期望假設相符合

對立假設 H_1：實驗結果與期望假設不符合

⑵臨界值：當 $\alpha=0.05$ 時，$\chi^2_{(0.05,\ 1)}=3.841$

⑶拒絕域：$\chi^2>3.841$

⑷統計值：依據假設，得知期望次數分別爲 90×3/4＝67.5 及 90×1/4＝22.5。故：

$$\chi^2=\frac{(80-67.5)^2}{67.5}+\frac{(10-22.5)^2}{22.5}=9.25$$

⑸∵9.25>3.841

∴拒絕 H_0

即實驗結果與期望假設並不符合。

2.某醫院之護理部認爲該院之護理人員有傾向於在週一到週五請假的現象，下列是該院護理人員的請假狀況：

星期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
請假人數	56	40	38	53	63

在 $\alpha=0.05$ 之顯著水準下，試檢定該院之護理人員在週一至週五請假是否有差異。

⑴虛無假設 H_0：該院護理人員在週一至週五請假並無差異

對立假設 H_1：該院護理人員在週一至週五請假有差異

⑵右尾檢定，$\alpha=0.05$，臨界值：$\chi^2_{(0.05,4)}=9.488$

⑶拒絕域：$\chi^2>9.488$

⑷統計值：依據假設，得知期望次數各爲 250×1/5＝50，因此：

$$\chi^2=\frac{(56-50)^2}{50}+\frac{(40-50)^2}{50}+\frac{(38-50)^2}{50}+\frac{(53-50)^2}{50}+\frac{(63-50)^2}{50}=9.16$$

⑸∵9.16<9.488

∴不能拒絕 H_0

也就是說該院護理人員在週一至週五請假的狀況，並無顯著性的差異存在，惟犯第一類型錯誤之機率仍有 5%。

二、獨立性檢定

㈠定義：

1.若同時使用兩個分類變數作爲自變數，以觀察它們對依變數所產生的

影響，則爲二因子的分類，此時研究者的主要興趣在於想要瞭解兩個自變數之間是否有「交互作用」（interaction）存在，而不是其間是否有「差異」存在。例如某教師以問卷方式調查男女生對男女合班的意見，其主要目的是在於想要知道是否隨著性別的不同，其看法也有所不同，而不是在於比較男女之間的差異，或看法之間的差異。他之所以採用二因子的分類的實驗，可能是因爲他懷疑男生答「贊成」的人數會較多，而女生答「反對」的人數會較多的緣故，也就是說，其看法：「贊成」或「反對」，可能隨著性別之不同而有所不同。

2. 同一母體的兩個變數間彼此是否獨立，可由獨立性檢定（Test for Independence）得知。假定母體之個體可依兩種分類標準分類，可由樣本透過卡方檢定判斷這兩種標準是否獨立，它是一種變數以名義尺度表示的相關測定，假設的建立爲：

   H_0：兩種分類標準獨立（無關）

   H_1：兩種分類標準不獨立（有關）

3. 獨立性檢定爲卡方檢定的一種，其用作判斷準則的統計量，其分配僅近於卡方分配而已，當自由度大於 1，此不連續的抽樣分配與連續的卡方分配極爲接近。

4. 一般而言，此種實驗的結果，通常以列聯表（Contingency Table）的形式列出，若第一因子分爲 m 個水準，第二個因子分爲 n 個水準，則此列聯表爲一 m×n 的列聯表，此時由公式計算出的統計值，爲一自由度（m－1）×（n－1）的 χ^2 分配。其檢定統計量爲：

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

其中 f_o 表觀察次數

　　f_e 表期望次數

以 2×2 列聯表爲例，說明期望次數的計算。

$$\text{每一方格的期望次數} = \frac{\text{該方格所在的列總和} \times \text{該方格所在的行總和}}{\text{總抽樣個數}}$$

A	B	$A+B$
C	D	$C+D$
$A+C$	$B+C$	$A+B+C+D$

期望次數 →

$\frac{(A+C)(A+B)}{(A+B+C+D)}$	$\frac{(B+D)(A+B)}{(A+B+C+D)}$
$\frac{(A+C)(C+D)}{(A+B+C+D)}$	$\frac{(B+D)(C+D)}{(A+B+C+D)}$

㈡理論基礎：

1. 虛無假設 H_0 爲「兩分類標準獨立」。期望次數是根據此獨立的虛無

假設計算的。故若觀察次數與期望次數相去甚多，表示兩分類標準不太可能無關。所以當卡方值大，在顯著水準α下，卡方值大於臨界值$\chi^2(\alpha,v)$時，應拒絕兩分類標準獨立的虛無假設，故此卡方檢定一定爲右尾檢定。又此獨立性檢定一般皆以聯立表的形式表示。故獨立性檢定又稱爲聯立表檢定。

2.在 2×2 的聯立表資料中，自由度 $v=(2-1)(2-1)=1$，要考慮 Yate 修正。且爲了提高檢定效率，期望次數 f_e 不到 5 者，亦須合併，該行合併或列合併，則須視如何合併較合理而定。2×2 之聯立表不能合併，則檢定不該依 χ^2 檢定進行。

理論上，自由度 $v=1$ 時，一定要修正；但實用上，只要求當有任何一交叉方格內的期望次數 f_e 在 5 與 10 之間(即任一期望次數 $5\leq f_e<10$)，才一定要校正；當所有的 $f_e\geq 10$ 時，則因影響檢定效率甚微，亦可不要校正。

㈢範例：

1.某研究者以問卷方式調查男女病人對「住院病房不依男女性別區分」的意見，100 名男女病人對「贊成」與「反對」的意見結果如下表所示：

意見 / 性別	贊成	反對	合計
男	44	16	60
女	16	24	40
合計	60	40	100

問病人對於此一問題的意見是否隨著男女性別而有所不同？（$\alpha=0.05$）

利用列聯表做獨立性檢定時，須先計算其期望次數，如下表所示。

	贊成	反對
男	36	24
女	24	16

36=(60・60)/100

24=(60・60)/100

24=(60・60)/100

16=(60・60)/100

此時其自由度爲（2－1）×（2－1）＝1，假設檢定的步驟如下：

⑴虛無假設：病人對於此一問題的意見不隨著男女性別之不同而有所不同。

對立假設：病人對於此一問題的意見隨著男女性別之不同而有所不同。

⑵臨界值：當 $\alpha=0.05$ 時，$\chi^2_{(0.05,1)}=3.841$

⑶拒絕域：$\chi^2>3.841$

⑷統計值：

$$\chi^2=\frac{(44-36)^2}{36}+\frac{(16-24)^2}{24}+\frac{(16-24)^2}{24}+\frac{(24-16)^2}{16}$$

$$=11.1$$

⑸$\because 11.1>3.841$

$\therefore$虛無假設應予以拒絕

即病人對於此一問題的意見隨著男女性別而有所不同。

2.抽樣調查 500 個病人，依其教育背景及對疾病的認識，分類如下：

教育背景＼認識程度	良好	普通	缺乏	合計
醫學院	31	55	14	100
非醫學院	12	175	213	400
合計	43	230	227	500

試問此兩分類標準是否獨立？（$\alpha=0.05$）

利用列聯表做獨立性檢定時，須先計算眞期望次數，如下表所示。

教育背景＼認識程度	良好	普通	缺乏
醫學院	8.6	46	45.4
非醫學院	34.4	184	181.6

此時其自由度爲（2－1）×（3－1）＝2，假設檢定的步驟如下：

⑴虛無假設：此兩分類標準是獨立

對立假設：此兩分類標準不獨立

⑵臨界值：當 $\alpha=0.05$ 時，$\chi^2_{(0.05,2)}=5.991$

⑶拒絕域：$\chi^2>5.991$

⑷統計值：

$$\chi^2=\frac{(31-8.6)^2}{8.6}+\frac{(55-46)^2}{46}+\frac{(14-45.44)^2}{45.4}+$$

$$\frac{(12-34.4)^2}{34.4}+\frac{(175-184)^2}{184}+\frac{(213-181.6)^2}{181.6}$$

$$=102.28$$

⑸$\because 102.28>5.991$

$\therefore$虛無假設應予以拒絕

即此兩分類標準不獨立，教育背景與對疾病的認識有關。

精選試題

一、某醫院急診室記錄了一週來車禍求診的人數，結果如下表所示。

週一	週二	週三	週四	週五	週六	週日
8	12	6	11	9	10	14

試以 $\alpha=0.05$ 之顯著水準，檢定星期是否會影響車禍求診的人數。

答：㈠虛無假設 H_0：日期與車禍求診人數無關

對立假設 H_1：日期與車禍求診人數有關

㈡臨界值：當 $\alpha=0.05$ 時，$\chi^2_{(0.05,6)}=12.592$

㈢拒絕域：$\chi^2>12.592$

㈣統計值：

$$\chi^2=\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(12-10)^2}{10}+\frac{(6-10)^2}{10}+\frac{(11-10)^2}{10}$$

$$\frac{(9-10)^2}{10}+\frac{(10-10)^2}{10}+\frac{(14-10)^2}{10}=4.2$$

㈤因為 4.2<12.592，所以不能拒絕虛無假設 H_0

即日期與車禍求診人數無關。

二、從 200 名高血壓住院病患中，隨機抽出 100 名患者給予某新藥治療，其餘 100 名則給予相同劑量的寬心劑。100 名服新藥者中，有 75 人病情有改善；服用寬心劑的病人中，則有 65 人病情有改善。請問你有甚麼結論？（$\alpha=0.05$）

答：其觀察次數與期望次數如下表所示：

	服用新藥	服用寬心劑	合計
有改善	75(70)	65(70)	140
沒有改善	25(30)	35(30)	60
合計	100	100	200

㈠虛無假設 H_0：服用新藥物與病情改善無關

對立假設 H_1：服用新藥物與病情改善有關

㈡臨界值：當 $\alpha=0.05$ 時，$\chi^2_{(0.05,1)}=3.481$

㈢拒絕域：$\chi^2>3.481$

㈣統計值：

$$\chi^2 = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(35-30)^2}{30}$$

$$= 2.38$$

㈤因爲 2.38<3.481，所以不能拒絕虛無假設 H_0
即服用新藥物與病情改善無關。

三、試就下列資料以 $\alpha = 0.05$ 之顯著水準，檢定血型與胃腸潰瘍是否有關？

	O 型	A 型	B 型	AB 型
胃潰瘍	400	400	70	30
十二指腸潰瘍	1000	700	150	50
正常人	3100	2500	500	100

答：其觀察次數與期望次數如下表所示：

	O 型	A 型	B 型	AB 型	合計
胃潰瘍	400(450)	400(360)	70(72)	30(18)	900
十二指腸潰瘍	1000(950)	700(760)	150(152)	50(38)	1900
正常人	3100(3100)	2500(2480)	500(496)	100(124)	6200
合計	4500	3600	720	180	9000

㈠虛無假設 H_0 ：血型與胃腸潰瘍無關
對立假設 H_1 ：血型與胃腸潰瘍有關

㈡臨界值：$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{(0.05,6)} = 12.592$

㈢拒絕域：$\chi^2 > 12.592$

㈣統計值：

$$\chi^2 = \frac{(400-450)^2}{450} + \frac{(400-360)^2}{360} + \frac{(70-72)^2}{72}$$

$$+ \frac{(30-18)^2}{18} + \frac{(1000-950)^2}{950} + \frac{(700-760)^2}{760}$$

$$+ \frac{(150-152)^2}{152} + \frac{(50-38)^2}{38} + \frac{(3100-3100)^2}{3100}$$

$$+ \frac{(2500-2480)^2}{2480} + \frac{(500-496)^2}{496} + \frac{(100-124)^2}{124}$$

$$= 34.078$$

㈤因爲 34.078>12.592，所以拒絕虛無假設 H_0
即血型與胃腸潰瘍有關。