結　構　學　講　義

第　三　回

504720-3

社團法人 考友社 出版發行

第六講　彎矩分配法

命 題 重 點

一、彎矩分配法之基本觀念

(一)彎矩分配法的基本觀念，主要是以傾角變位法爲出發點。而彎矩分配法係逐步解傾角變位函數式，但不論靜不定次數多寡，此種方法無需解一連串聯立方程式麻煩。

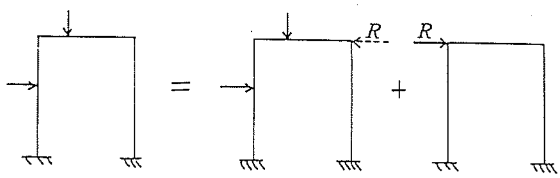
(二)優點：不必記公式，只須利用分配及傳遞的手續，機械的反覆計算，便可求得最後的平衡彎矩。尤其在計算對稱或反對稱的結構更爲便捷。

二、彎矩分配法之原理：

(一)結構物中桿端彎矩包括兩個部份：

1. 動定結構各桿端之固定端彎矩。
2. 等值節點荷重產生之桿端彎矩。

彎矩分配法係將節點上之不平衡彎矩予以重複分配與傳遞後使各節點之彎矩達到平衡。但是，若有側位移時，彎矩平衡時，剪力不平衡，故須將剪力予以考慮，以下圖示之方法予以分析。

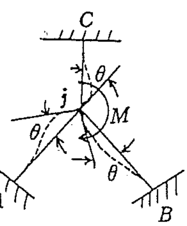


(二)彎矩分配法之計算步驟如下所列：

1. 首先將各點固定，求各桿端之固定端彎矩，求法與斜坡撓度法中之固定端求法同。
2. 每次放鬆一節點，加上一等值彎矩，再依各桿之K值將彎矩分配至各桿。
3. 將分配得到之彎矩的一半傳遞至各桿之另一端。
4. 重複 2. 3.步驟，直至平衡爲止（達到要求之精度爲止）。

關於力矩之分配原理如下列所述：

考慮一結構如下圖示，於中央節點承受一彎矩M



由上圖可得各桿於 j 點分配之彎矩爲M_{jA}，M_{jB}，M_{jC}，則

$$\Sigma M_{joint\ j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{jA} + M_{jB} + M_{jC} = M \cdots\cdots ①$$

根據斜坡撓度法之基本方程式得下列各式

$$(\ \theta_A = \theta_B = \theta_C = 0\ )$$

$$\begin{cases} M_{jA} = 2EK_{jA}(2\theta) = 4EK_{jA}\theta \\ M_{jB} = 2EK_{jB}(2\theta) = 4EK_{jB}\theta \\ M_{jC} = 2EK_{jC}(2\theta) = 4EK_{jC}\theta \end{cases}$$

將上列各式代入①式，則

$$4E(K_{jA} + K_{jB} + K_{jC})\theta M$$

故得 $\theta = \dfrac{M}{4E\Sigma K}$

上式中 $\Sigma K = K_{jA} + K_{jB} + K_{jC}$

則

$$\begin{cases} M_{jA} = \dfrac{K_{jA}}{\Sigma K} M \\ M_{jB} = \dfrac{K_{jB}}{\Sigma K} M \\ M_{jC} = \dfrac{K_{jC}}{\Sigma K} M \end{cases} \cdots\cdots ②$$

若令 $D_{jA} = \dfrac{K_{jA}}{\Sigma K}$ $D_{jB} = \dfrac{K_{jB}}{\Sigma K}$ $D_{jC} = \dfrac{K_{jC}}{\Sigma K}$

則②式可改寫爲

$$\begin{cases} M_{jA} = D_{jA}M \\ M_{jB} = D_{jB}M \\ M_{jC} = D_{jC}M \end{cases} \cdots\cdots ③$$

③式可爲各桿於 j 端之分配彎矩，D_{jA}，D_{jB}，D_{jC} 稱爲分配因數 (Distribution factor)。

至於傳遞至桿端A、B、C之傳遞彎矩M_{Aj}，M_{Bj}，M_{Cj}亦可依據斜坡撓度法之基本方程式得到下列各式：

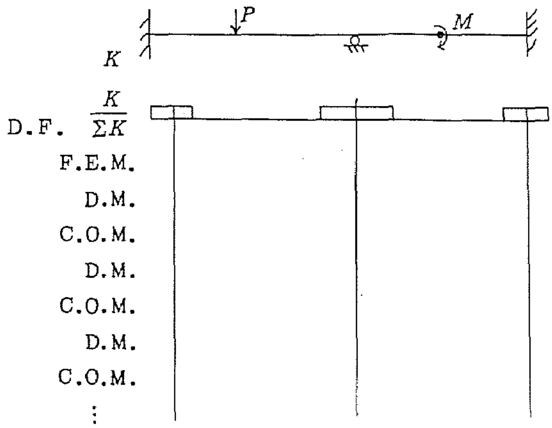
$$\begin{cases} M_{Aj} = 2EK_{jA}\theta \\ M_{Bj} = 2EK_{jB}\theta \\ M_{Cj} = 2EK_{jC}\theta \end{cases}$$

上列各式中之M_{Aj}，M_{Bj}，M_{Cj} 各爲M_{jA}，M_{jB}，M_{jC} 之一半，即

$$\left\{ \begin{aligned} M_{Aj} &= \frac{1}{2} M_{jA} \\ M_{Bj} &= \frac{1}{2} M_{jB} \\ M_{Cj} &= \frac{1}{2} M_{jC} \end{aligned} \right\} \cdots\cdots ④$$

故可得傳遞彎矩（M_{Aj}，M_{Bj}，M_{Cj}）為分配彎矩之半，因此可知傳遞因數（Carry over factor）為分配因數之$\frac{1}{2}$。

往後，於計算時均以列表格方式計算之，以F.E.M.表示固定端彎矩，D.F.表示分配因數，D.M.表示分配彎矩，C.O.M.表示傳遞彎矩，表格列法可以下列圖示所示為準。



三勁度修改法

當一外力作用於桿件上，若對於遠端之情況已知，則可使用下述之方法對勁度（K）加以修改，可免去將彎矩傳遞至遠端而可直接將最後結果寫上，省去傳遞分配等繁瑣步驟。

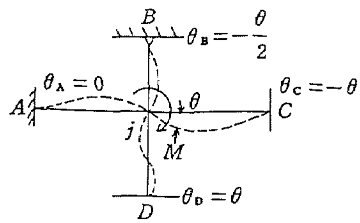
若已知一彎矩M作用於右圖中之 j 點，

A端為固定端，故$\theta_A = 0$

B端為簡支樑，故$M^F_{Bj} = 0$，$\theta_B = -\frac{\theta}{2}$

jC端為對稱，故$\theta_C = -\theta$

jD為反對稱，故$\theta_D = \theta$



$$\Sigma M_{joint\ c} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{jA} + M_{jB} + M_{jC} + M_{jD} = M \quad \cdots\cdots ⑤$$

上式中

$$\begin{cases} M_{jA} = 2EK_{jA}(2\theta) \\ M_{jB} = 2EK_{jB}(2\theta + \theta_b) = 2EK_{jB}(2\theta - \frac{1}{2}\theta) = 2EK_{jB}(\frac{3}{2}\theta) \\ M_{jC} = 2EK_{jC}(2\theta + \theta_C) = 2EK_{jC}(2\theta - \theta) = 2EK_{jC}(\theta) \\ M_{jD} = 2EK_{jD}(2\theta + \theta_D) = 2EK_{jD}(2\theta + \theta) = 2EK_{jD}(3\theta) \end{cases}$$

上列四式改寫成

$$\left\{\begin{aligned} M_{jA} &= 4EK_{jA}\theta = 4EK'_{jA}\theta && (K'_{jA} = K_{jA}) \\ M_{jB} &= 4E(\frac{3}{4}K_{jB})\theta = 4EK'_{jB}\theta && (K'_{jB} = \frac{3}{4}K_{jB}) \\ M_{jC} &= 4E(\frac{1}{2}K_{jC})\theta = 4EK'_{jC}\theta && (K'_{jC} = \frac{1}{2}K_{jC}) \\ M_{jD} &= 4E(\frac{3}{2}K_{jD})\theta = 4EK'_{jD}\theta && (K'_{jD} = \frac{3}{2}K_{jD}) \end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots⑦$$

則將上列四式代入⑤式得

$$\theta = \frac{M}{4E\Sigma K'} \quad \cdots\cdots⑧$$

上式中 $\Sigma K' = K'_{jA} + K'_{jB} + K'_{jC} + K'_{jD}$

將⑧式代入⑦式，則得

$$\left\{\begin{aligned} M_{jA} &= \frac{K'_{jA}}{\Sigma K'} M \\ M_{jB} &= \frac{K'_{jB}}{\Sigma K'} M \\ M_{jC} &= \frac{K'_{jC}}{\Sigma K'} M \\ \Sigma M_{jD} &= \frac{K'_{jD}}{\Sigma K'} M \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots⑨$$

綜合上述可得下列各項結論：

㈠遠端爲固定端，則

$$K' = K$$

㈡遠端爲簡支承（鉸支承或輥支承），則

$$K' = \frac{3}{4}K$$

㈢遠端與該端成對稱，則

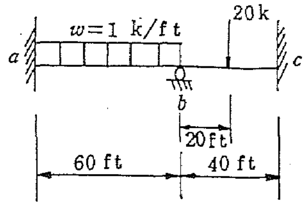
$$K' = \frac{1}{2}K$$

㈣遠端與該端成反對稱，則

$$K' = \frac{3}{2}K$$

精　選　試　題

一、試分析圖示中各端之彎矩。



【解】先求固定端彎矩

$$M^F_{ab} = -M^F_{ba} = -\frac{wl^2}{12} = -300\text{k-ft}$$

$$M^F_{bc} = -M^F_{cb} = -\frac{Pl}{8} = -100\text{k-ft}$$

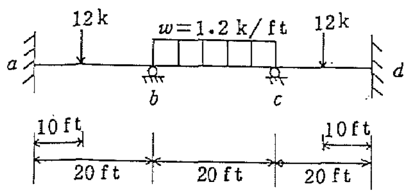
K_{ab} ： K_{bc} = 4 ： 6

取 $K_{ab} = 0.4$，$K_{bc} = 0.6$

則可列出下表求之：

$\frac{K}{\Sigma K}$	1	0 (a)	0.4 (b)	0.6	0 (c)	1
F.E.M.		−300	300	−100	100	
D.M.			−80	−120		
C.O.M.		−40			−60	
Σ		−340	220	−220	40	

二試分析圖示中各端之彎矩。



【解】計算列表如下：