

# 工程力學講義

## 第三回

50470B-3



考友社 出版發行  
社團人考  
法考

# 工程力學講義 第三回



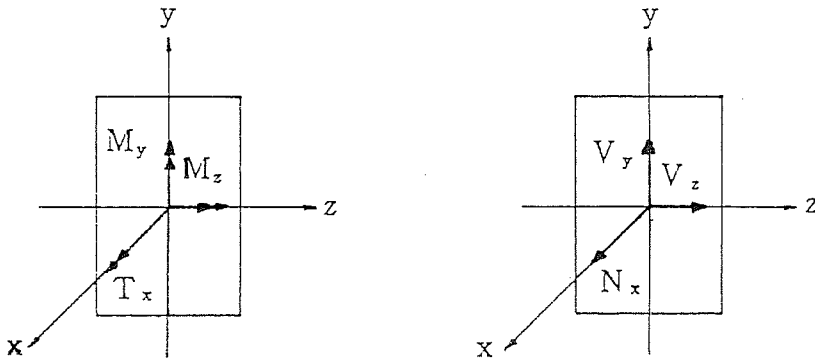
第五講 材料力學.....	1
壹、應力與應變.....	1
貳、斷面之彎曲.....	15
參、斷面之拉伸壓縮與扭曲.....	31
肆、能量原理.....	46
伍、非彈性彎曲.....	63
精選試題.....	76

# 第五講 材料力學

## ● 命題重點 ●

### 壹、應力與應變

#### 一、斷面力與應力型式



(a) 斷面力偶之作用

(b) 斷面力之作用

圖 5-1 斷面力之型式

斷面力型式：

- 1 彎矩 ( bending moment )：例如圖 5-1 (a)中 $M_y$  及 $M_z$  均屬之，其特點：力偶向量平行於斷面。
- 2 扭矩 ( torque )：例如圖 5-1 (a)中之 $T_x$  屬之，其特點：力偶向量垂直於斷面。
- 3 剪力 ( shear force )：例如圖 5-1 (b)中之 $V_y$  及 $V_z$  均屬之，其特點：力量橫切於斷面。
- 4 軸力 ( axial force )：例如圖 5-1 (b)中之 $N_x$ ，其特點：力量垂直於斷面。

斷面應力型式：

- 1 正交應力 ( normal stress )：應力方向與斷面正交，其產生原因為斷面受軸力或彎矩之作用。
- 2 剪應力 ( shearing stress )：應力方向與斷面平行，其產生原因

為斷面受剪力或扭矩之作用。

## 二、應力狀態

符號說明：

1  $i$  平面：與  $i$  軸正交之平面，例如：

(a)  $x$  平面：與  $x$  軸正交之平面。

(b)  $y$  平面：與  $y$  軸正交之平面。

2  $\sigma_i$ ：作用於  $i$  平面上之正交應力，例如：

(a)  $\sigma_x$ ：作用於  $x$  平面上之正交應力。

(b)  $\sigma_y$ ：作用於  $y$  平面上之正交應力。

3  $\tau_{ij}$ ：作用於  $i$  平面而與  $j$  軸平行之剪應力，例如：

(a)  $\tau_{xy}$ ：作用於  $x$  平面而與  $y$  軸平行之剪應力。

(b)  $\tau_{yx}$ ：作用於  $y$  平面而與  $x$  軸平行之剪應力。

應力狀態：

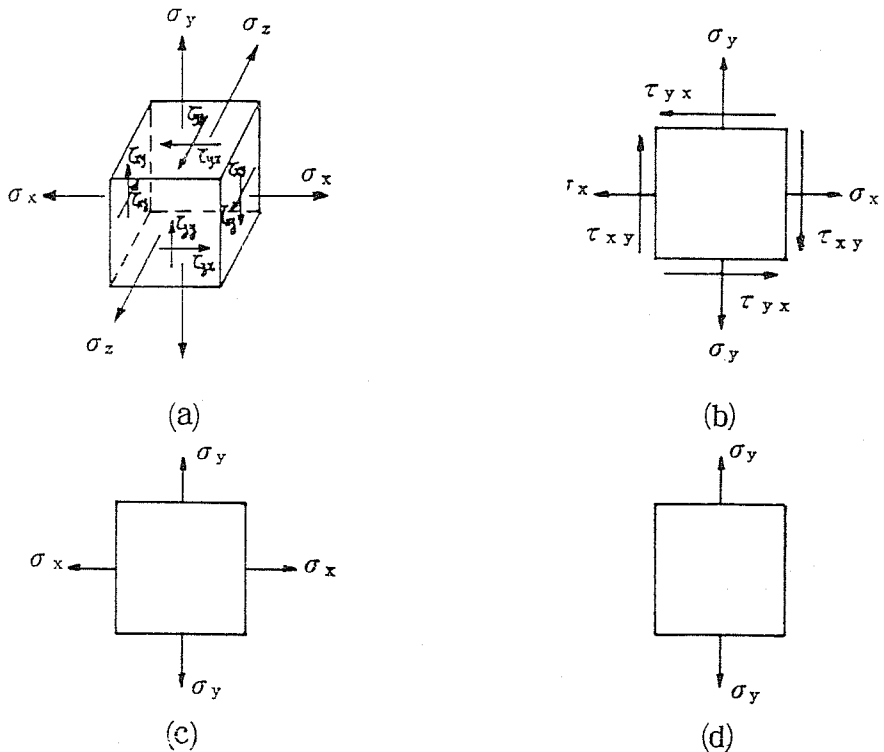


圖 5-2 應力狀態

如圖 5-2 所示，斷面所受應力狀態可以區分為：

1. 三維應力狀態：如圖(a)所示， $\sigma_x \neq 0$ ， $\sigma_y \neq 0$ ， $\sigma_z \neq 0$ ， $\tau_{xy} \neq 0$ ， $\tau_{yz} \neq 0$ ， $\tau_{zx} \neq 0$ 。
2. 三軸應力狀態：當圖(a)中  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ，但  $\sigma_x \neq 0$ ， $\sigma_y \neq 0$ ， $\sigma_z \neq 0$  時。
3. 均向應力狀態：當圖(a)中  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ，而  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$  時。
4. 平面應力狀態： $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  而  $\sigma_x \neq 0$ ， $\sigma_y \neq 0$ ， $\tau_{xy} \neq 0$  時，如圖(b)所示。
5. 雙軸應力狀態：平面應力狀態下，若  $\tau_{xy} = 0$  而  $\sigma_x \neq 0$ ， $\sigma_y \neq 0$  者稱之，如圖(c)所示。
6. 單軸應力狀態：平面應力狀態下  $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$  而  $\sigma_x \neq 0$  時稱之，如圖(d)所示。
7. 純剪應力狀態： $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} \neq 0$  時稱之。

### 三、應力分析

本文重點在求得平面應力狀態下，任一平面正交應力與剪應力之方法，以下說明如何利用公式法及摩爾圓法以進行應力分析。

#### (一) 平面應力轉換公式

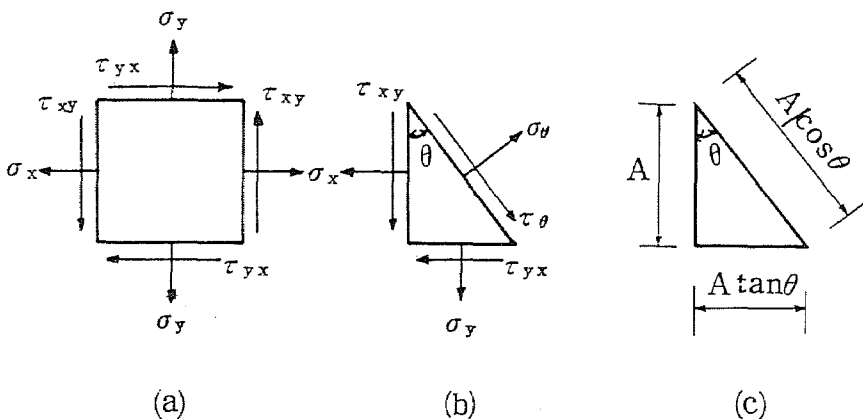


圖 5-3 應力分析公式推導示意圖

如圖 5-3 (a)表示一承受平面應力之單元體，即  $\sigma_x \neq 0$ ， $\sigma_y \neq 0$ ， $\tau_{xy} \neq 0$ ，但  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ 。

### 1. 任意面上應力計算

#### (1) 正交應力 $\sigma_\theta$ 計算

$\sigma_\theta$  方向上力量之平衡

$$\sigma_\theta \times A / \cos \theta = \sigma_x A \cos \theta + \sigma_y (A \tan \theta) (\sin \theta) + \tau_{xy} A \sin \theta + \tau_{yx} A \tan \theta \cos \theta \quad \text{得 } \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots (a)$$

$$\text{以 } \cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta) / 2, \quad \sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta) / 2$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{代入(a)式得}$$

$$\therefore \sigma_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \dots\dots (5-1)$$

#### (2) 剪應力 $\tau_\theta$ 計算

$\tau_\theta$  方向上力量之平衡

$$\tau_\theta \times A / \cos \theta = \sigma_x A \sin \theta - \sigma_y A \tan \theta \cos \theta - \tau_{xy} A \cos \theta + \tau_{yx} A \tan \theta \sin \theta$$

得  $\tau_\theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta + \tau_{yx} \sin^2 \theta$

$$\therefore \tau_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (5-2)$$

由 (5-1) 及 (5-2) 兩式可得結論：

- (a) 兩正交平面上正交應力和為一常數。
- (b) 兩正交平面上剪應力大小相等方向相反。

使用 (5-1) (5-2) 兩式時，其符號系統定為：

- (a) 正交拉應力為“正”。
- (b) 在 y 面上剪應力  $\tau_{yx}$  為順針向旋轉者為“正”。
- (c) 剪應力  $\tau_\theta$  造成順時針向旋轉者為“正”。

### 2. 主應力面方向與主應力大小之決定

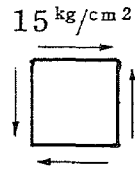
**主應力面 (principal plane)**：面上僅有正交應力而無剪應力存在者稱之。

**主應力 (principal stress)**：主應力面上之正交應力。

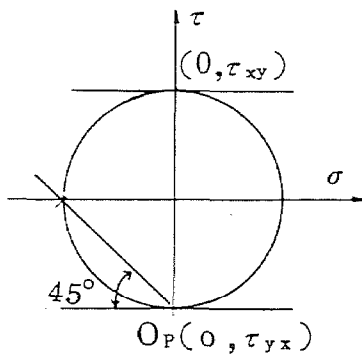
令 <1-2> 式  $\tau_\theta = 0$  可得

# 精選試題

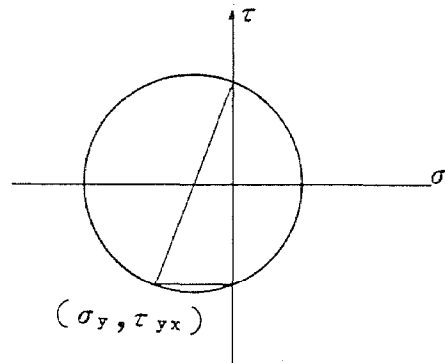
一、如右圖所示應力單元體，若材料容許拉應力  $-10 \text{ kg/cm}^2$ ，試求不使拉應力超出  $-10 \text{ kg/cm}^2$  時，在  $x$  平面或  $y$  平面上所需加之壓應力，又若  $\sigma_x = +5 \text{ kg/cm}^2$ ，求需要之  $\sigma_y$ 。



【解】



圖(a)



圖(b)

(1) 採用“壓逆為正”系統，則由上圖(a)所示摩爾圓，可知在  $15 \text{ kg/cm}^2$  純剪應力作用下，在與  $y$  平面成  $45^\circ$ （順針向）方向上有  $15 \text{ kg/cm}^2$  之拉應力產生，此應力大於材料容許拉應力  $10 \text{ kg/cm}^2$ ，為了使斜拉應力小於容許拉應力，則可依下式計算需要在  $x$  面上或  $y$  面上所需加之壓應力。

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \dots\dots\dots(a)$$

若僅需在  $y$  面上加壓應力時

$$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_t - \sigma_y/2)^2 = (\sigma_y/2)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\text{解得 } \sigma_y = \frac{1}{\sigma_t} (\sigma_t^2 - \tau_{xy}^2)$$

式中  $\sigma_t = \text{容許拉應力} = -10 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_y = \frac{1}{-10} (10^2 - 15^2) = 12.5 \text{ kg/cm}^2$$

以摩爾圓檢驗之如上圖(b)所示。

(2) 若 x 面上正交應力為  $\sigma_x$  時，則由(a)式可得

$$\sigma_y = (\tau_{xy}^2 + \sigma_t \sigma_x - \sigma_t^2) / (\sigma_x - \sigma_t)$$

當  $\sigma_x = +5 \text{ kg/cm}^2$  代入上式可得

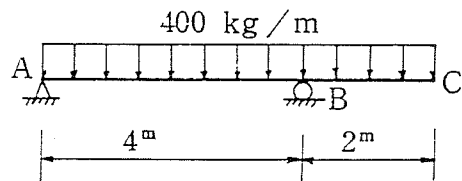
$$\sigma_y = +5 \text{ kg/cm}^2$$

代入(a)式得

$$\sigma = \frac{5+5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5-5}{2}\right)^2 + 15^2} = -10 \text{ kg/cm}^2$$

二、

試繪出右圖所示靜定梁之彎矩圖與剪力圖。



【解】 1 先求反力可得

$$R_A = 600 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$R_B = 1800 \text{ kg} (\uparrow)$$

2 繪剪力圖

$$\text{AB 間: } V = 600 - wx$$

.....(a)

由(a)式可知 V 係直線變化

$$\text{當 } V = 0 \text{ 時 } x = 600 / w = 1.5 \text{ m}$$

$$\text{當 } x = 4 \text{ m 時, } V = -1000 \text{ kg}$$

$$\text{BC 間: } V = wx \text{ (C 點處 } x = 0 \text{)}$$

$$\text{當 } x = 2 \text{ m } \quad V = 800 \text{ kg}$$

