流體力學講義

第　二　回

501020-2

社團法人

WWW.EXAMINER.COM

社團法人 考友社 出版發行

第三講 流體動力學

命 題 重 點

一、流線（flow line）：

(一)在流體中所繪一條與所經過之每一點的速度向量同方向的線，稱爲流線。
(二)流線具有連續性？
(三)穩定流：又稱定量流（Steady flow）。穩定流動之流體，每一點之物理條件恒不變即

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial t}=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial t}=0\ ,\ \frac{\partial T}{\partial t}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

(四)均勻流：又稱等速流（Uniform flow）。若流動中每一點速度向量於任意時刻彼此相同稱均勻流即

$$\frac{\partial V}{\partial S}=0$$

(五)流線方程式：

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

二、連續方程式：

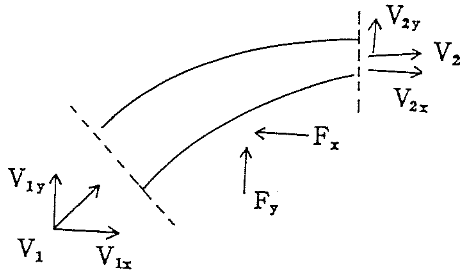
$$Q=A_1V_1=A_2V_2$$

三、能量方程式（柏努利方程式）：

$$\frac{P_1}{r}+\frac{V_1^{\ 2}}{2g}+z_1=\frac{P_2}{r}+\frac{V_2^{\ 2}}{2g}+z_2+h_f$$

式中：
(一)P_1，P_2＝流體分別在1及2位置處之壓力
(二)V_1，V_2＝流體分別在1及2位置處之速度
(三)z_1，z_2＝流體分別在1及2位置處之高程
(四)h_f＝流體自位置1至位置2處之能量損失
(五)r＝流體之單位重
(六)g＝62.4 lb/ft^3＝9.8 KN/m^3

四、動量方程式：



$$\Sigma F_x = \rho Q(V_{2x} - V_{1x})$$
$$\Sigma F_y = \rho Q(V_{2y} - V_{1y})$$

五動能修正因數α：

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$$

v表速度分佈，V爲平均速度。

六動量修正因數β：

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$$

七理想流體流動之基本條件：

(一)連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(二)牛頓第二運動定律

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mV)$$

(三)流體與邊界間無空隙，流體也不能穿過固體邊界

八運算符號定義：

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$q = iu + jv + kw$$

(一)發散量

$$\mathrm{div}1 = \nabla \cdot q = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (iu + jv + kw)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

㈡旋度

$$\text{curl } q=\nabla\times q=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z})\times(iu+jv+kw)$$

$$=i(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})+j(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})+k(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})$$

㈢梯度

$$\text{grad}\,\phi=\nabla\phi=i\frac{\partial\phi}{\partial x}+j\frac{\partial\phi}{\partial y}+k\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$a=ia_x+ja_y+ka_z$$

$$b=ib_x+jb_y+kb_z$$

$$a\cdot b=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_xb_z$$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

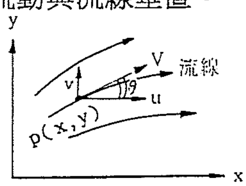
$$=i(a_yb_z-a_ab_y)+j(a_zb_x-a_xb_z)+k(a_xb_y-a_yb_x)$$

㈣實心物體旋轉時，一點速度的旋度curl q是旋轉ω的2倍即curl $q=2\omega$。

九、煙線、流線及路線：

㈠煙線乃眾流體質點之瞬間連線。

㈡流線是一種人為的線如下圖，線上任一點p（x，y）之切線即表示該點流速V之方向，其於x、y方向上速度分量分別為u、v，由於全體流線上之統速皆切於流線，因此絕無任何流體之流動與流線垂直。



㈢路線是用以描述任一已知流體質點在流場中所經行之路徑。

㈣流管乃由一束流線所形成，而當定量流時㈠、㈡、㈢三線重合為一。

㈤上圖中

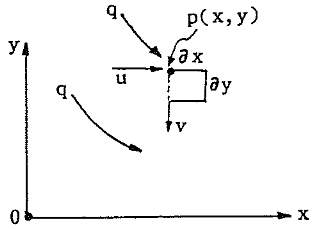
$$\frac{v}{u}=\tan\theta=\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore udy-vdx=0$$

上式稱為流線方程式。

十、流函數ψ：

㈠流函數是用以說明任何特殊流型之一種數學工具如下圖，當p（x，y）表二元穩定平面流運動上之一動點，並假設為單位厚度，則過任何OP連線之體積流動率即為P點位置之函數，此乃流函數之定義即$\psi=(x, y)$，流函數單位為$ft^3/sec/ft$。



㈡於是分速度u、v以ψ表示如點P移動一微小距離∂y，則過∂y之流動率為$\partial \psi = u \partial y$而得

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

同理

$$v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

㈢由流線方程式$udy-vdx=0$

於是

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}dy-(-\frac{\partial \psi}{\partial x})dx=0$$

㈣由定義知上式應等於全微分

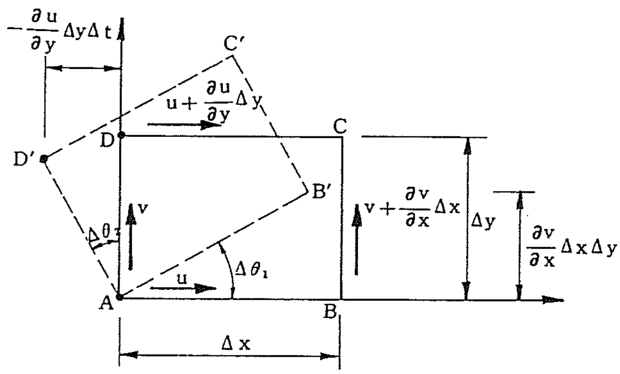
$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy=0$$

$\therefore \psi=c(const)$

三旋性流及非旋性流：

㈠非旋性流指每一流體單元體不對其與運動面垂直方向之軸而轉動者（否則即為旋性流）設在此面內，每一流體單元體內相互垂直兩線段之平均角速度為零則非旋性流之條件即可滿足。

㈡如下圖於Δt時間內ABCD轉至新位置AB' C' D' 且線段AB對Z軸之角速度為ω_{AB}，線段AD對Z軸之角速度為ω_{AD}即



二元流內矩形單元體之轉動

精 選 試 題

一、三維流動之速度分佈爲$u=-x$，$v=2y$，$w=5-z$

(一)試求通過（2，1，1）點之流線方程式。

(二)可否適用於不可壓縮流的連續方程式。

【解】

(一)流線方程式 $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{5-z}$$

$$-\ell nx=\frac{1}{2}\ell ny+C_1=-\ell n(5-z)+C_2$$

通過（2，1，1） $-\ell n2=\frac{1}{2}\ell n1+C_1=-\ell n(5-1)+C_2$

$$C_1=-\ell n2$$
$$C_2=\ell n2$$

於是 $-\ell nx=\frac{1}{2}\ell ny-\ell n2$

$$=-\ell n(5-z)+\ell n2$$

$$-\ell nx=\ell n\frac{\sqrt{y}}{2}=\ell n\frac{2}{5-z}$$

$$\because\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{y}}{2}\Rightarrow x\sqrt{y}=2 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{5-z}\Rightarrow\frac{5-z}{x}=2 \quad \cdots\cdots(2)$$

(1)=(2) $\therefore x\sqrt{y}=\frac{5-z}{x}$

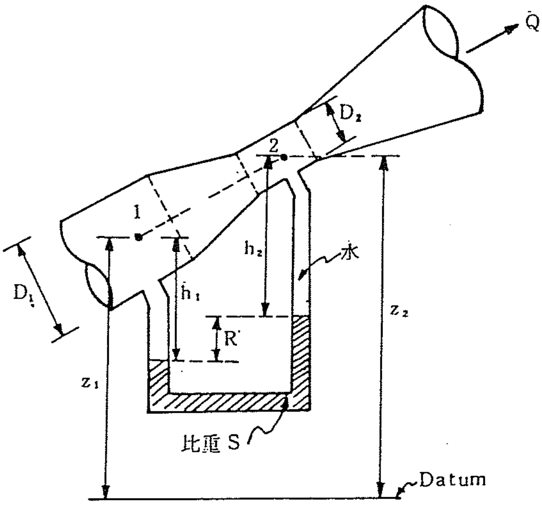
$$x^2\sqrt{y}=5-z$$

(二)$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial(-x)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(5-z)$

$$=-1+2-1=0$$

故此流速分佈可滿足不可壓縮流之連續方程式。

二、有關文氏計，試推導其流量。



【解】(一)利用連續方程式 $A_1V_1=A_2V_2$ ....(1)

及柏努利方程式

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2 \quad \text{........................(2)}$$

(二)由上圖 $z_1-h_1+R+h_2=z_2$

代入(2)式

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_1-h_1+R+h_2$$

$$\frac{V_2^2}{2g}-\frac{V_1^2}{2g}-h_1+R+h_2=\frac{P_1}{\gamma}-\frac{P_2}{\gamma} \quad \text{........................(3)}$$

(三)由上圖 $\frac{P_1}{\gamma}+h_1-SR-h_2=\frac{P_2}{\gamma}$

$$\therefore \frac{P_1}{\gamma}-\frac{P_2}{\gamma}=SR+h_2-h_1 \quad \text{........................(4)}$$

(1)、(4)代入(3)得

$$\frac{V_2^2}{2g}-\frac{1}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}V_2\right)^2-h_1+R+h_2=SR+h_2-h_1$$

$$\frac{V_2^2}{2g}\left(1-\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)=R(S-1)$$

$$V_2=\sqrt{\frac{2gR(S-1)}{1-\frac{A_2^2}{A_1^2}}} \quad \text{........................(5)}$$

(四)流量 $Q=A_2V_2=A_2\cdot\sqrt{\frac{2gR(S-1)}{1-\frac{A_2^2}{A_1^2}}}$ ....(6)